УДК 336.743.057.7:51-7

Безкоровайний В.С.
аспірант кафедри інформатики та системології
Київського національного економічного університету
імені Вадима Гетьмана
Дербенцев В.Д.
кандидат економічних наук,
професор кафедри інформатики та системології
Київського національного економічного університету
імені Вадима Гетьмана

МОНІТОРИНГ СТАНУ ВАЛЮТНОГО РИНКУ З ВИКОРИСТАННЯМ КУСКОВО-НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

У статті запропоновано підхід до моделювання стану валютного ринку з використанням кусково-неперервних функцій, таких як функція Уолша та функція Радемахера. Наведено математичний апарат для аналізу часових рядів валютних котирувань та визначення похибки, ророблено алгоритм його використання. Проведено розрахунки та наведено графічне відображення відновленого часового ряду та похибки котирувань валютної пари «євро/долар». Визначені якості графічних статистичних моделей відновлених часових рядів.

Ключові слова: моніторинг, стан ринку, валютний ринок, кусково-неперервні функції, функція Уолша, функція Радемахера.

В статье предложен подход к моделированию состояния валютного рынка с использованием кусочно-непрерывных функций, таких как функция Уолша и функция Радемахера. Приведен математический аппарат для анализа временных рядов валютных котировок и определения погрешности, а также разработан алгоритм его использования. Проведен расчет и представлено графическое отображение восстановленного временного ряда и погрешности котировок валютной пары «евро/доллар». Определены свойства графических статистических моделей восстановленных временных рядов.

Ключевые слова: мониторинг, состояние рынка, валютный рынок, кусочно-непрерывные функции, функция Уолша, функция Радемахера.

Постановка проблеми. Фінансисти, аналітики та біржові торговці щоденно приймають рішення про купівлю-продаж різних фінансових активів, зокрема валюти. Для зменшення ризику таких операцій та отримання очікуваних прибутків від своїх вкладень кожен із них повинен аналізувати низку факторів, що впливають на ринкові валютні курси і породжують тенденції зростання чи зниження.

Цей аналіз загалом можна визначити як моніторинг стану ринку. Останнім часом цей аналіз здійснюється переважно з використанням сучасних математичних методів, зокрема методів аналізу часових рядів [1]. Доцільність застосування цього інструментарію ґрунтується на гіпотезі, що часовий ряд у латентній формі містить всю необхідну інформацію, що «ринок враховує все», і отже, в поведінці котирувань вже закладене врахування всіх істотних чинників, що зумовлюють майбутню, принаймні короткострокову динаміку. Поточний стан ринку (тобто поточні очікування) порівнюється із станом ринку у минулому, за допомогою чого досягається здійснити достатньо реалістичний прогноз майбутніх тенденцій.

Найуживанішими математичними моделями для оцінки стану ринку є індикатори тенденції та осцилятори. До індикаторів тенденції можна віднести ковзні середні, метод конвергенції-дивергенції та інші моделі, побудовані на усереднені коливань валютних котирувань, які підтверджують тенденцію. Осцилятори, зокрема, швидкості ринку, відносної сили, підказують точки розворотів трендів. Але вони мають загальний недолік – вони слідують за ціною, тому мають лаг, а це, в свою чергу, приводить до помилкової оцінки стану ринку та запізнілим відкриттям угод, коли коливання валютного котирування вже змінило стан ринку.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Аналізу стану валютного ринку з використанням математичних моделей присвячено чимало робіт вітчизняних учених, таких як М.А. Гапонюк, О.І. Береславська, О.В. Боришкевич, О.М. Сохацька, І.В. Роговська-Іщук, С.І. Вінницький, Я.В. Белінська, В.В. Сержанов, Г.І. Костьов'ят, І.В. Томакова та інші.

Фундаментальні основи досліджувались у працях зарубіжних учених-економістів, зокрема, Д. Швагера [2], С. Ачелиса, Б. Вильямса, Л. Борселліно, С. Шаріффа, А. Грімса тощо.

Метою дослідження є розроблення математичної моделі моніторингу стану валютного ринку з фільтрацією початкового часового ряду від випадкових коливань (у деяких дослідників використовується термін «ринковий шум» [2]) і надання сигналу вигляду, зручного для подальшого прогнозування.

Виклад основного матеріалу дослідження. Теоретичною основою розроблення нашої математичної моделі моніторингу стану валютного ринку є спектральний аналіз та фільтрація на основі рядів Фур'є. Ряди Фур'є мають певні недоліки, але ідея рядів Фур'є, яка полягає у поданні сигналу у вигляді суми базисних функцій, може бути використана під час створення моделей моніторингу стану валютного ринку. Істотною перевагою цього методу є те, що відновлення сигналу у вигляді ряду Фур'є забезпечує мінімальну похибку відновлення.

Як базисні функції рядів Фур'є на валютному ринку нами було використано (на відміну від стандартного аналізу Фур'є, що ґрунтується на застосуванні періодичних, гладких та нескінченно-гармонійних функцій) кусково-неперервні функції. До таких функцій належать поліноми Лежандра, Ермітта, Уолша, Лагерра, Хаара та інші. Для вирішення завдання з моніторингу стану валютного ринку було обрано функції Уолша, які вже тривалий час використовуються в прикладних дослідженнях для обробки растрових зображень, в голографії й аналізі медичних сигналів. Це пов'язано з такими їх перевагами [3]:

– вони є кусково-неперервними, що дає змогу використовувати для моделювання як стрімких змін сигналів (котирувань валюти), так і відносно пологих ділянок ряду;

– мають змінний період – чим більше порядковий номер функції, тим дрібніші локальні особливості сигналів ця функція спроможна змоделювати. Це дає змогу оптимально підбирати потрібні періоди для виділення реальної циклічності валютного ринку;

– функції Уолша приймають значення 0 або 1, що дає змогу успішно користуватися методами обробки цифрових сигналів;

– ці функції є квазіперіодичними – періодичні тільки в межах певної часової ділянки.

Аналітично функції Уолша обчислюються за формулами [4]:

$$Wal(0,\theta) \equiv 1; \quad Wal(n,\theta) = \prod_{k=1}^{m} \left[Rad(k,\theta) \right]^{n_k},$$

$$n = 0,1,\ldots, N-1, \tag{1}$$

де $Wal(n,\theta)$ – функція Уолша порядку n; θ – безрозмірний параметр відносного часу; $Rad(k,\theta)$ – функція Радемахера порядку k; n_k – значення k-го розряду номера функції Уолша n, записане у вигляді m-розрядного коду Грея; N – кількість функцій Уолша в системі, пов'язане з параметром m відношенням: $N=2^m$.

Відносний час розраховується як $\theta=t/T$, $\theta \in [0;1)$, де t – час, а T – період аналізу (тривалість сигналу).

Функції Радемахера утворюються з синусоїдальних функцій згідно формулі [2]:

$$Rad(0,\theta) \equiv 1, \quad Rad(k,\theta) = sign\left[\sin\left(2^k \pi\theta\right)\right]. \tag{2}$$

Отримана система функцій виявляється повною й ортогональною, тому вона придатна для розкладання сигналів довільного виду зі скінченим інтервалом визначення. Функції Уолша є кусково-постійними. Інтервал визначення функцій можна вважати таким, що складається з $N=2^m$ рівних підінтервалів. На кожному з них функції Уолша приймають значення +1 або 1. У точках розриву функції неперервні праворуч.

Функції Уолша ортогональні і нормовані, оскільки:

$$\int_0^1 Wal(n,\theta)\cdot Wal(k,\theta)d\theta = \begin{cases} 1, \text{якщо } n = k \\ 0, \text{якщо } n \neq k \end{cases} \tag{3}$$

Середнє значення функцій Уолша для всіх $n\neq 0$ дорівнює нулю:

$$\int_0^1 Wal(n,\theta)d\theta = 0, \quad n = 0,1,\ldots, N-1 \tag{4}$$

Функції Уолша мають властивість мультиплікативності, тобто добуток двох функцій Уолша дорівнює новій функції Уолша з цієї ж системи [4]:

$$Wal(n,\theta)\cdot Wal(k,\theta) = Wal(p,\theta), \tag{5}$$

де n, k, p – будь-які числа.

Множення будь-якої функції Уолша самої на себе дає функцію з нульовим номером:

$$Wal(n,\theta)\cdot Wal(n,\theta) = Wal(0,\theta) \tag{6}$$

Для розкладання сигналів, заданих на інтервалі $[0,T)$, зручно використовувати функції Уолша, які після перетворення їх аргументу записуються у вигляді $Wal(n,t/T)$.

Узагальнений ряд Фур'є за функціями Уолша одновимірного сигналу $f(t)$, $t \in [0;T)$, буде мати вигляд [3; 5]:

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nWal(n,\frac{t}{T}). \qquad (7)$$

Тут C_n є коефіцієнтами Уолша:

$$C_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)Wal(n,\frac{t}{T})dt. \qquad (8)$$

Оскільки функції Уолша на інтервалах дискретності приймають значення +1 або –1, під час обчислення коефіцієнтів (C_n) не потрібно робити операцію множення. Таким чином, спектральний аналіз по Уолшу пов'язаний з меншими витратами машинного часу, ніж аналіз із використанням гармонійних функцій.

Позначимо функцію Уолша як функцію від трьох параметрів:

$$Wal(n,t,T)=Wal(n,\frac{t}{T}) \qquad (9)$$

У реальних розрахунках завжди використовується обмежена кількість коефіцієнтів ряду (N). У теорії обробки сигналів отриманий за підсумовування обмеженої кількості коефіцієнтів сигнал називається «відновленим сигналом», або «усіченим рядом Фур'є». Такі ряди мають рівномірну та середньоквадратичну збіжність, а також збіжність у середньому, і можуть бути використані для апроксимації сигналів, що описуються інтегрованими функціями.

Для нашого випадку відновлений сигнал обчислюється за формулою:

$$W(t,T)=\sum_{n=0}^{N-1}C_nWal(n,t,T) \qquad (10)$$

Для чисельної реалізації запропон ованого алгоритму математичної обробки часових рядів котирувань валюти з використанням функцій Уолша було обрано часовий ряд добових котирувань євро до американського долару за період з 01.01.2010 р. до 30.11.2017 р. (понад 2000 спостережень). Отриманий в результаті обробки початкового сигналу за формулою (10) відновлений сигнал наведено на рис. 1.

Можна побачити, що графік відновленого сигналу є кусково-неперервним, тобто складається з набору рівнів. При цьому кожен рівень відповідає певному значенню котирувань. На рис. 2 наведено графік похибки відновлення, тобто різницю між початковим і відновленим сигналами.

Сенс математичної обробки часових рядів полягає в тому, що замість реального сигналу аналізується його графічна статистична

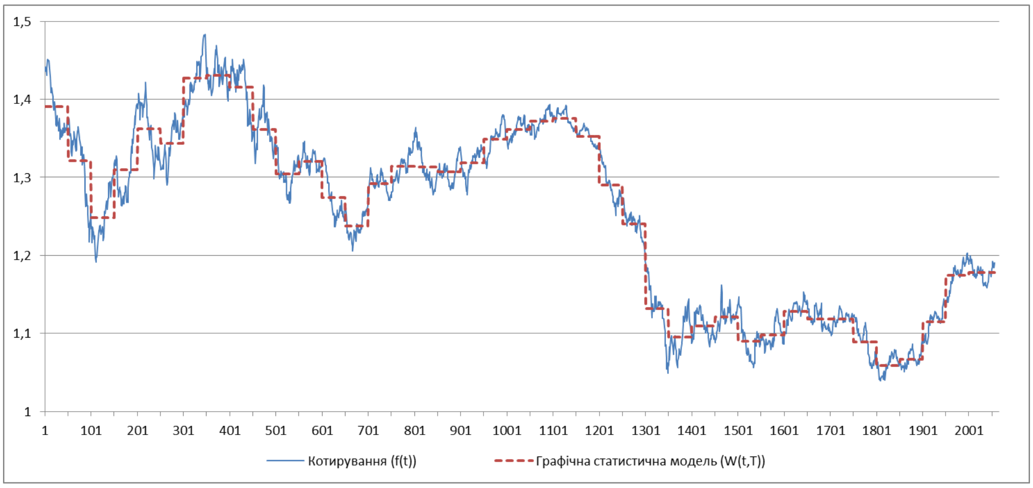

Рис. 1. Часовий ряд котирувань EUR/USD та його графічна статистична модель

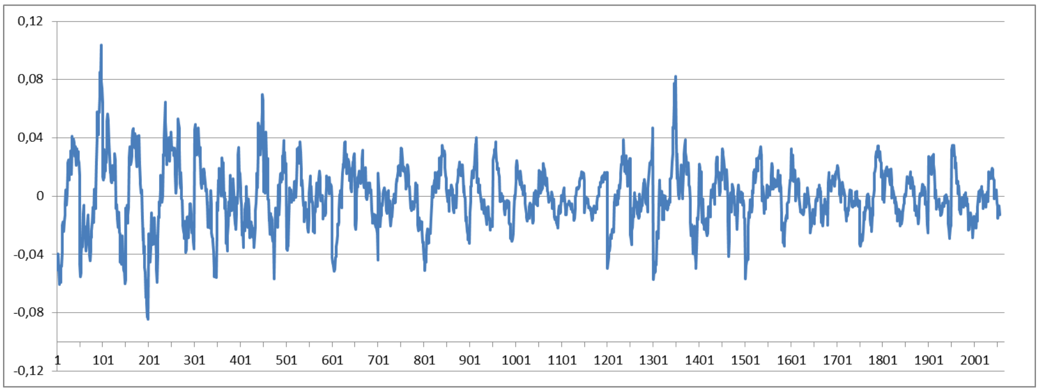

Рис. 2. Похибка відновлення часового ряду котирувань EUR/USD

модель, яка тим точніше відповідає початковому сигналу, чим більше коефіцієнтів було взято при розрахунку.

Відзначимо, що початковий сигнал *f(t)* тепер може бути представлений у вигляді:

$$f(t) = W(t,T) + w(t_k), \qquad (11)$$

де $w(t_k)$ – похибка, тобто різниця між вихідним сигналом і його графічною статистичною моделлю; *k* – номер інтервалу (рівня Уолша), $k = 1,2,\ldots, N$.

Сигнал *W(t,T)* являє собою рівні котирувань, а різниця $w(t_k)$ – короткострокові коливання щодо цих рівнів. Сигнал *W(t,T)* відноситься до всього сигналу довжиною *T* і використовує єдиний для всього сигналу час *t*, а $w(t_k)$ відповідає кожному окремому періоду функції Уолша, довжиною $T_0=T/N$. Час, який використовується на цьому інтервалі (t_k), обчислюється за формулою $t_k=t-(k-1)*T_0$.

Тоді похибка апроксимації $w(t_k)$ може бути представлена у вигляді:

$$w(t_k) = \sum_{k=1}^{N} w_k(t, T_0). \qquad (12)$$

Тут $w_k(t,T_0)$ – похибка на k-ій дільниці довжиною T_0. Аналітично її можна представити у вигляді різниці початкового сигналу і його графічної статистичної моделі на кожній дільниці:

$$w_k(t,T_0) = \begin{cases} (f(t) - W(t,T)), t \in [(k-1)\cdot T_0; k\cdot T_0) \\ 0, t \notin [(k-1)\cdot T_0; k\cdot T_0) \end{cases} \qquad (13)$$

Згідно з теорією рядів Фур'є збільшення кількості членів ряду повинно приводити до більш точного наближення вихідного сигналу. Практичні розрахунки показали, що збільшення кількості членів ряду більше 300 приводить до незначного зменшення похибки. Це зумовлено тим, що окремі локальні особливості сигналу починають впливати на весь спектр, що спричиняє появу помилкових викидів у тих ділянках сигналу, в яких ряд Уолша як би «передбачає» їх появу. Таким чином, постає завдання пошуку оптимального значення кількості функцій Уолша, що забезпечують наближення сигналу із заданою точністю, та не приводять до спотворення сигналів.

Пошук оптимальної кількості функцій може здійснюватися за критерієм мінімізації максимального відхилення вихідного сигналу від графічної статистичної моделі, мінімізації сумарного абсолютного відхилення або мінімізації середньоквадратичного відхилення.

Середньоквадратичне відхилення ($\sigma^N\Sigma$) для похибки (різниці вихідного сигналу і його графічної статистичної моделі) розраховується за формулою:

$$\sigma_{\Sigma}^{N} = \sum_{t=0}^{T} \frac{\left(f(t) - W(t,T)\right)^2}{T}. \qquad (14)$$

З урахуванням усього вищевикладеного формула розрахунку середньоквадратичного відхилення матиме вигляд:

$$\sigma_{\Sigma}^{N} = \sum_{t=0}^{T} \frac{\left(f(t) - \sum_{n=0}^{N-1} C_n Wal(n,t,T)\right)^2}{T} \to \min_{N} \qquad (15)$$

Таким чином, можна запропонувати такий алгоритм математичної обробки часових рядів котирувань валют з використанням цієї моделі:

1. Для початкового сигналу *f(t)* за формулою (8) розраховуємо коефіцієнти Уолша (C_n).

2. Варіюючи кількість функцій Уолша (*N*) в діапазоні від 10 до 500 з кроком 10, за формулами (10), (1), (2) визначаємо набір графічної статистичної моделі (*W(t,T)*).

3. Розраховуємо різницю початкового сигналу і його графічної статистичної моделі для кожного значення *N*.

4. Виходячи з результатів, отриманих в попередніх пунктах, визначаємо сумарне середньоквадратичне відхилення похибки наближення ($\sigma^N\Sigma$) за формулою (15).

5. Визначаємо оптимальну кількість функцій Уолша ($N_{опт}$), яка відповідає мінімуму цільової функції (15).

6. Виходячи зі знайденої на попередньому кроці кількості функцій Уолша ($N_{опт}$), отримуємо відповідну оптимальну графічну статистичну модель (*W(t,T)*).

Проведені дослідження дали змогу встановити такі властивості графічних статистичних моделей:

1. Моделі є стійкими щодо окремих викидів сигналів, тобто не змінюються за різких коливань цін, не зумовлених фундаментальними факторами. Ця властивість важлива при використанні сигналу для подальшого прогнозування валютних курсів.

2. Моделі є чутливими до істотної зміни стану ринку (наприклад, кризовим явищам). Графічна статистична модель змінюються при різкому падінні або підйомі котирувань валют, якщо цей рух валютного ринку обумовлено фундаментальними факторами.

3. Довжина сходинки Уолша визначається двома факторами: числом функцій Уолша *N* і загальною довжиною сигналу *T*.

4. Різниця між початковим сигналом та його графічна статистична модель (тобто похибка, рис. 2) має середню, що прямує до нуля. Причому цей результат справедливий для будь-яких сигналів і будь-якої кількості функцій Уолша. Це дає змогу дійти висновку про те, що отримана графічна статистична модель відповідає початковому сигналу, очищеному від випадкових коливань (ринкового шуму).

5. Зміни графічної статистичної моделі повністю відображають зміни початкового сигналу, тому що коефіцієнт кореляції між цими сигналами дорівнює 0,9... 0,99. При цьому з ростом числа функцій Уолша ступінь кореляції зростає.

Висновки з проведеного дослідження. Розроблена модель моніторингу стану валютного ринку дає можливість поділу часового ряду на два складники, один з яких характеризує стан ринку на цьому часовому інтервалі, а інша є свого роду ринковим шумом щодо цих станів. Вивчення початкового часового ряду заміщується вивченням його кусково-безперервної графічної статистичної моделі.

Графічна статистична модель відображає стан ринку, тобто певні рівні котирувань, які змінюються в часі, і характеризуються розміром і тривалістю. Ідея існування станів ринку пов'язана з концепціями циклічності розвитку економіки і періодичністю економічних явищ і процесів.

Перевагами запропонованої моделі з погляду подальшого прогнозування є відсутність ринкового шуму в обробленому сигналі; зручна форма обробленого сигналу у вигляді сходинок рівної довжини, що дає змогу використовувати теорію марковських ланцюгів для прогнозування динаміки валютного ринку.

Список використаних джерел:

1. Дербенцев В.Д. Синергетичні та еконофізичні методи дослідження динамічних та структурних характеристик економічних систем: [монографія] / В.Д. Дербенцев [та ін.]. – Черкаси: Брама-Україна, 2010. – 287 с.
2. Schwager Jack D., Schwager on Futures: Technical Analysis / Schwager J.D. – 1995. – 775 p.
3. Залманзон Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях / Л.А. Залманзон. – М. : Наука, 1989. – 496 с.
4. Schafer Alan V., Oppenheim Ronald W. Digital Signal Processing / Schafer A., Oppenheim R. – 2015. – 785 p.
5. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов: учеб. пособие / А.Б. Сергиенко – 3-е изд. – СПб. : БХВ-Петербург, 2011. – 768 с.

Bezkorovainyi V.S., Derbentsev V.D.

MONITORING OF THE STATE OF CURRENCY MARKET USING PIECEWISE CONTINUOUS FUNCTIONS

This paper is devoted to approach to modelling the state of the currency market using piecewise-continuous functions, such as the Walsh and the Rademacher function. The mathematical instrument for the analysis of time series of currency quotations and definition of an error is resulted, and also the algorithm of its use is developed. The calculation and graphical representation of the recovered time series and the error in quotations of the Euro/Dollar currency pair are performed. Properties of graphic statistical models of reconstructed time series are determined.

The developed model of monitoring of the state of the currency market makes it possible to divide the time series into two components, one of which characterizes the market situation at a given time interval, and the other is a kind of market noise regarding these states. The study of the initial time series is replaced by the study of its piecewise-continuous graphical statistical model.

A graphical statistical model reflects the state of the market, that is, certain levels of quotes that vary in time, and are characterized by size and duration. The idea of the existence of market conditions is associated with the concepts of cyclical economic development and the frequency of economic phenomena and processes.

The advantages of the proposed model in terms of further forecasting are: absence of market noise in the processed signal; a convenient form of the processed signal in the form of steps of equal length, which allows using the theory of Markov chains to predict the dynamics of the currency market.

Key words: monitoring, market state, currency market, piecewise continuous functions, Walsh function, Rademacher function.